数理解析研究所講究録
123巻 1971年 134-145

language における words の permutation について

静大 工　大芝　猛

§1　序

language $A \subseteq \Sigma^*$ に対し $\wp(A)$ を A の中の words の文字を permute することによつてうるすべての words の集合とする。

一般に、A が context-free language であっても $\wp(A)$ は context-free とは限らない。以下では $\wp(A)$ が context-free になるための A に関する1つの代数的十分条件を与え、その応用として Ginsburg の1つの open problem の解答を与える。またこの十分条件は A が「1次独立な periods の集合をもつ linear set に対応する bounded set ($\subseteq a_1^* \cdots a_n^*$)」の場合は必要十分条件となる。

定義と記号

- $\Sigma = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, n 個の相異なる文字の集合

- $N=\{0,1,2,\cdots\}$, 負でない整数の集合
- $u, v \in \Sigma^*$ に対し $\underline{u \equiv v} \Leftrightarrow$ "$\#_x(u)=\#_x(v)$ for all $x\in\Sigma$"

  但し $\underline{\#_x(w)}=$ wの中の 文字xの個数
- $w\in\Sigma^*$ に対し $\wp(w)=\{u \mid u\equiv w,\ u\in\Sigma^*\}$

  $A\subseteq\Sigma^*$ に対し $\wp(A)=\bigcup_{w\in A}\wp(w)$
- $A, B\subseteq\Sigma^*$ に対し $A\equiv B \Longleftrightarrow \wp(A)=\wp(B)$
- $f_{\langle a_1,\cdots,a_n\rangle}$ はN^nから $a_1^*\cdots a_n^*$ の上への次のような 1:1 写像

  $$f_{\langle a_1,\cdots a_n\rangle}([k_1,\cdots,k_n])=a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}\ ;\ [k_1,\cdots,k_n]\in N^n$$

  $$f_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(L)=\{f_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(y)\mid y\in L\}\ ;\ L\subseteq N^n$$
- また $\psi_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}$ はΣ^*からN^nの上への次のような写像.

  $$\psi_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(w)=[\#_{a_1}(w),\cdots,\#_{a_n}(w)]\ ;\ w\in\Sigma^*$$

  $$\psi_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(A)=\{\psi_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(w)\mid w\in A\}\ ;\ A\subseteq\Sigma^*$$
- $\tau\in N^n$, $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\subseteq N^n$ に対し

  $$L(\tau;\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\})=\{\tau+d_1\alpha_1+\cdots+d_r\alpha_r\mid d_1,\cdots,d_r\in N\}$$ とし

また $V[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]=\{d_1\alpha_1+\cdots+d_r\alpha_r\mid d_1,\cdots,d_r\in N\}$ も用いる。

Proposition

(1) $A, B\subseteq\Sigma^*\Rightarrow\wp(A\cup B)=\wp(A)\cup\wp(B)$, $\wp(AB)=\wp(BA)$

(2) $U, V\subseteq N^n\Rightarrow\wp(f_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(U+V))=\wp(f_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(U)\cdot f_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(V))$

(3) $V\subseteq N^n\Rightarrow\wp(f_{\langle a_1\cdots a_n\rangle}(V))\cap a_{i_1}^*\cdots a_{i_n}^*=f_{\langle a_{i_1}\cdots a_{i_n}\rangle}(V\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ i_1&\cdots&i_n\end{pmatrix})$

但し $[x_1,\cdots,x_n]\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ i_1&\cdots&i_n\end{pmatrix}=[x_{i_1},\cdots,x_{i_n}]$ (置換)

§2 $\wp(A)$ が Context-free になるための條件.

[Proposition] $A, B \subseteq \Sigma^*$ に対し,

(1) $\wp(A), \wp(B)$ context-free $\Rightarrow \wp(A \cup B)$ context-free

(2) $\wp(A)$ context-free (regular), $\wp(B)$ regular $\Rightarrow \wp(AB)$ context-free (regular)

(3)[(*)] $\wp(A)$ context-free, $\mathbb{C}(A) \Rightarrow \wp(A^*)$ context-free

但し $\mathbb{C}(A) \Leftrightarrow$

$$\forall w \in \wp(A^* - A)\ \exists u, v, y\ (w = uyv,\ uv \in \wp(A^*),\ y \in \wp(A^*),\ |uv| \neq 0,\ |y| \neq 0)$$

さて,「$A \subseteq a_1^* \cdots a_n^*$ に対し

(*1) $\wp(A)$ context-free $\Rightarrow$ A context-free」

は $A = \wp(A) \cap a_1^* \cdots a_n^*$ から明らかである。このとき bounded な context-free language の Characterization から

(*2) $\psi_{\langle a_1 \cdots a_n \rangle}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} L(c_i ; \mathbb{P}_i)$

各 $\mathbb{P}_i = \{\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{i r_i}\}$ は <u>1次独立</u> かつ <u>stratified</u> とかける。但し

(定義) $\mathbb{P} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\} \subseteq N^n$ が <u>stratified</u> とは

「(1) 各ベクトル α_i は高々2つの座標を除いて 0.

(*) Maurer (1969)

(2) nonzero座標を2つもつ任意の2つのベクトル $\in \mathbb{P}$

$\alpha_i=[0,\cdots,0,x_k,0,\cdots,0,x_\ell,0,\cdots,0]$, $\alpha_j=[0,\cdots,0,y_{k'},0,\cdots,0,y_{\ell'},0,\cdots,0]$

に対しては 決して $k<k'<\ell<\ell'$ とならずまた

$k'<k<\ell'<\ell$ とならない。

ことをいう。

一方(*1)の逆は一般に成立しない。例えば

(*3) $A_1=f_{\langle a_1 a_2 a_3 a_4\rangle}L([0,0,0,0];\{[1,0,0,1],[0,1,1,0]\})\subseteq a_1^*\cdots a_4^*$

は periods の stratified set をもち Context-free であるが $\mathcal{P}(A_1)$ は context-free ではない。

(∵) $\mathcal{P}(A_1)$ context-free ならば

$A_2=\mathcal{P}(A_1)\cap a_1^* a_2^* \underline{\underline{a_4^* a_3^*}}$ は context-free である。

一方 $A_2=f_{\langle a_1 a_2 a_4 a_3\rangle}L([0,0,0,0];\{[1,0,1,0],[0,1,0,1]\})$

の periods の集合は stratified でなく A_2 は Context-free ではない。 矛盾。)

(*1)の逆が成立するために A の periods の集合に対する条件が stratified だけでは不足であり、これに次の <u>pairwise connected</u> なる条件を付すると $\mathcal{P}(A)$ は Context-free となる。

(定義) $\mathbb{P}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\subseteq N^n$ が <u>pairwise connected</u> とは

「nonzero座標を2つ以上もつ $\mathbb{P}$ の任意の2つのベクトル α_i,α_j は少なくとも1つの座標番号において共に nonzero

要素をもつ。」

[定理 1] $A \equiv f_{\langle a_1, \cdots a_n \rangle} L(\tau ; \mathbb{P})$, $\tau \in N^n$, $\mathbb{P} \subseteq N^n$ 1次独立ならば

$$\wp(A) \text{ context-free} \Leftrightarrow \mathbb{P} \text{ stratified かつ pairwise connected.}$$

この定理を用いるならば更に一般に $\wp(A)$ が context-free なる十分条件として

[定理 2] $A \subseteq \{a_1, \cdots, a_n\}^*$ に対し

「$\psi_{\langle a_1, \cdots a_n \rangle}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} L(\tau_i ; \mathbb{P}_i)$, 各 $\mathbb{P}_i$ は stratified かつ pairwise connected」 $\Rightarrow$ $\wp(A)$ は Context-free。

をうる。

更に $\mathbb{P} \subseteq N^3$ のときは必らず $\mathbb{P}$ は pairwise connected となるので、次の系をうる。

[系] $A \subseteq a^* b^* c^*$ に対して

$$\wp(A) \text{ context-free} \Leftrightarrow A \text{ context-free.}$$

この系は次の Ginsburg の open problem に対する否定的解答を与える。

" $A \subseteq a^* b^* c^*$ に対し $\wp(A)$ が not context-free になる Context free language A は存在するか ? "

さて[定理 1]の証明 "$\Leftarrow$" には次の lemma が用いられる。(" $\Rightarrow$ " の証明は前記(＊3) の証明と同様に容易。)

[lemma 1] 任意の2つの辺が少くとも1つの頂点を共有するようなグラフは ① 三角形 かまたは ② すべての辺が(少くとも)1つの頂点を共有するグラフ かのいずれかである。

[lemma 2] K, L, M, N, P, Q > 0 integer のとき

$\wp((b^K c^L)^*(c^N a^M)^*(a^P b^Q)^*)$ は context-free language である。

[lemma 3] $K_1, \cdots, K_r, L_1, \cdots L_r \geqq 0$ integers のとき

$\wp((a^{K_1} b_1^{L_1})^*(a^{K_2} b_2^{L_2})^* \cdots\cdots (a^{K_r} b_r^{L_r})^*)$ は context-free language である。

§3. 定理1 '⇐' の証明

$A \equiv f_{\langle a_1 \cdots a_n \rangle} L(\tau; \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\})$

$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ は1次独立 stratified, pairwise connected 故

$$\begin{cases} \alpha_1, \cdots, \alpha_r : \text{nonzero 座標が2つのもの。} \\ \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s : \quad 〃 \quad 〃 \quad 1つ \quad 〃 \text{。} \end{cases}$$

として一般性を失わない。$f_{\langle a_1 \cdots a_n \rangle}$ を f と略記すれば

$A \equiv f(\tau) \cdot f(V[\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) \cdot f(V[\alpha_{r+1}]) \cdot \cdots \cdot f(V[\alpha_s])$ 。

また $\wp(f(\tau))$, $\wp(f(V[\alpha_{r+1}]))$, $\cdots$, $\wp(f(V[\alpha_s]))$ はいずれも regular 。従って Proposition (2) から

$\wp(A) = \wp(f \cdot V[\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) \cdot f(\tau) \cdot f(V[\alpha_{r+1}]) \cdots f(V[\alpha_s]))$

が context-free であることを示すために

$\wp(f(V[\alpha_1 \cdots \alpha_r]))$ が context-free である。ことを示せば十分である。

$$\begin{array}{lccccccccccc} \alpha_i = [& 0, & \cdots, & 0, & K_i, & 0, & \cdots, & 0, & L_i, & 0, & \cdots, & 0\,] \\ \text{座標番号} & 1 & \cdots & & I_i & & \cdots & & J_i & & \cdots & n \end{array}$$

とすると

$\{\alpha_1, \cdots \alpha_r\}$ も pairwise connected であることから

「$l_i = \{I_i, J_i\}$ $(i=1,\cdots,r)$ を辺とするグラフは lemma 1 の仮定をみたし、従って次の2つの場合のみを生ずる。

(Case 1) $\{l_1, \cdots, l_r\} = \{\{H,I\},\{I,J\},\{J,H\}\}$ $\quad 1 \leq H < I < J \leq n$

(Case 2) $\{l_1, \cdots, l_r\} = \{\{I,I_1\},\cdots,\{I,I_r\}\}$, $I \neq I_i$ $(i=1,\cdots,r)$

Case 1 の場合は $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ の1次独立性から

$r=3$ でなければならず

$$\begin{aligned} \{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ &= \{[0,\cdots\overset{H}{\cdot}\cdots\cdots,0,\overset{I}{K},0,\cdots,0,\overset{J}{L},0,\cdots,0], \\ &\qquad [0,\cdots,0,M,0,\cdots\cdots\cdots 0,N,0,\cdots,0], \\ &\qquad [0,\cdots,0,P,0,\cdots,0,Q,0,\cdots\cdots\cdots,0]\} \end{aligned}$$

$\therefore \wp(f\,V[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]) = \wp((a_I^K a_J^L)^*(a_J^N a_H^M)^*(a_H^P a_I^Q)^*)$

従って lemma 2 より context-free.

Case 2 の場合には同様にして

$\wp(f\,V[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]) = \wp((a_I^{K_1} a_{I_1}^{L_1})^* \cdots\cdots (a_I^{K_r} a_{I_r}^{L_r})^*)$

従って lemma 3 より context-free.

§4. lemma の証明.

lemma 2, 3 の証明にはそれぞれの集合の words のみをきっちり accept する push-down acceptor を与える。
lemma 3 については容易なので lemma 2 についてのみ述べる。

$$A_0 = \wp((b^K c^L)^*(c^N a^M)^*(a^P b^Q)^*) = T(\mathbb{A}_0)$$

$$\mathbb{A}_0 = (\mathbb{K}, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, q_0, \mathbb{F})$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \cup \{q_F\}$$

$$\mathbb{K}_1 = \{\langle -l, -m, -n\rangle \mid l, m, n \text{ integers}, 0 \le l, m, n \le H\}$$

$$H = \max(K, L, M, N, P, Q)$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}, \quad \Gamma = \{z_0, a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$$

$$q_0 = \langle 0, 0, 0\rangle, \quad \mathbb{F} = \{q_F\}$$

δ は次の関係のすべてを含む最小の集合（但し、特に条件を付していないときは $0 \le l, m, n \le H$, $z \in \Gamma$ なるすべての l, m, n, z に対する関係を与えているものとする。）

1.1 Input to inner counter rules

$\delta(\langle -l, -m, -n\rangle, a, z) \ni (\langle -l+1, -m, -n\rangle, z)$ for l, $0 < l \le H$

$\delta($ 〃 $, b, z) \ni (\langle -l, -m+1, -n\rangle, z)$ 〃 m, $0 < m \le H$

$\delta($ 〃 $, c, z) \ni (\langle -l, -m, -n+1\rangle, z)$ 〃 n, $0 < n \le H$

1.2 Input to push down storage rules

$\delta(\langle 0, -m, -n\rangle, a, z) \ni (\langle 0, -m, -n\rangle, za)$

$\delta(\langle -l, 0, -n\rangle, b, z) \ni (\langle -l, 0, -n\rangle, zb)$

$\delta(\langle -l, -m, 0\rangle, c, z) \ni (\langle -l, -m, 0\rangle, zc)$

1.3 Detete rules

$\delta(\langle 0, 0, -n\rangle, \Lambda, z) \ni (\langle -P, -Q, -n\rangle, z)$

$\delta(\langle 0, -m, 0\rangle, \Lambda, z) \ni (\langle -M, -m, -N\rangle, z)$

$\delta(\langle -l, 0, 0\rangle, \Lambda, z) \ni (\langle -l, -K, -L\rangle, z)$

1.4 Adjust (storage to counter) rules

$\delta(\langle -l, -m, -n\rangle, \Lambda, a) \ni (\langle -l+1, -m, -n\rangle, \Lambda)$, for $l ; 0 < l \leq H$

$\delta($ 〃 $, \Lambda, b) \ni (\langle -l, -m+1, -n\rangle, \Lambda)$, 〃 $m ; 0 < m \leq H$

$\delta($ 〃 $, \Lambda, c) \ni (\langle -l, -m, -n+1\rangle, \Lambda)$, 〃 $n : 0 < n \leq H$

2.1 Positive store rules

$\delta(\langle -l, -m, -n\rangle, \Lambda, z) \ni (\langle -l-1, -m, -n\rangle, za)$, for $l : 0 \leq l < H$

$\delta($ 〃 , 〃 $) \ni (\langle -l, -m-1, -n\rangle, zb)$, 〃 $m : 0 \leq m < H$

$\delta($ 〃 $) \ni (\langle -l, -m, -n-1\rangle, zc)$, 〃 $n : 0 \leq n < H$

2.2 Negative store rules

$\delta(\langle -l, -m, -n\rangle, \Lambda, z_0) \ni (\langle -l+1, -m, -n\rangle, z_0\bar{a})$, for $l ; 0 < l \leq H$

$\delta($ 〃 $, \Lambda, \bar{a}) \ni ($ 〃 $, \bar{a}\bar{a})$, 〃 〃

$\delta($ 〃 $, \Lambda, z_0) \ni (\langle -l, -m+1, -n\rangle, z_0\bar{b})$, 〃 $m ; 0 < m \leq H$

$\delta($ 〃 $, \Lambda, \bar{b}) \ni ($ 〃 $, \bar{b}\bar{b})$, 〃 〃

$\delta($ 〃 $, \Lambda, z_0) \ni (\langle -l, -m, -n+1\rangle, z_0\bar{c})$, 〃 $n ; 0 < n \leq H$

$\delta($ 〃 $, \Lambda, \bar{c}) \ni ($ 〃 $, \bar{c}\bar{c})$, 〃 〃

2.3 Adjust (input to storage) rules

$$\delta(\langle 0,-m,-n\rangle,\ a,\ \bar{a}) \ni (\langle 0,-m,-n\rangle,\ \Lambda)$$
$$\delta(\langle -l,0,-n\rangle,\ b,\ \bar{b}) \ni (\langle -l,0,-n\rangle,\ \Lambda)$$
$$\delta(\langle -l,-m,0\rangle,\ c,\ \bar{c}) \ni (\langle -l,-m,0\rangle,\ \Lambda)$$

2.4 End rule

$$\delta(\langle 0,0,0\rangle,\ \Lambda,\ Z_0) \ni (q_F,\ \Lambda)$$

[$A_0 = \wp((b^K c^L)^*(c^N a^M)^*(a^P b^Q)^*) = T(\mathbb{A}_0)$ の証明]

A_0の各 Configuration $\mathfrak{S} = (\langle -l,-m,-n\rangle,\ u,\ \gamma) \in K_1 \times \Sigma^* \times \Gamma^*$
に対して$\mathfrak{S}$の含む文字情報の量を意味する

$$I(\mathfrak{S}) = a^{-l+\#_a(u,\gamma)-\#_{\bar{a}}(\gamma)}\, b^{-m+\#_b(u,\gamma)-\#_{\bar{b}}(\gamma)}\, c^{-n+\#_c(u,\gamma)-\#_{\bar{c}}(\gamma)}$$

を対応させる。

(I) "$T(\mathbb{A}_0) \subseteq A_0$" : ルール$\delta$の作り方から一般に
「$\mathfrak{S} \overset{*}{\underset{\delta}{\vdash}} \mathfrak{S}'$, $I(\mathfrak{S}') \equiv (b^K c^L)^{d'}(c^N a^M)^{e'}(a^P b^Q)^{f'}$, $d', e', f' \geqq 0$
ならば $I(\mathfrak{S}) \equiv (b^K c^L)^{d}(c^N a^M)^{e}(a^P b^Q)^{f}$ for some $d, e, f \geqq 0$」
が成立する。従って, $w \in T(\mathbb{A}_0)$ 即ち

$$\mathfrak{S}_0 = (\langle 0,0,0\rangle, w, Z_0) \overset{*}{\underset{\delta}{\vdash}} (\langle 0,0,0\rangle, \Lambda, Z_0) = \mathfrak{S}' \underset{\delta}{\vdash} (q_F, \Lambda\ \Lambda)$$

のとき $I(\mathfrak{S}') = a^0 b^0 c^0 \equiv (b^K c^L)^0 (c^N a^M)^0 (a^P b^Q)^0$ に注意すれば

$$w \equiv I(\mathfrak{S}_0) \equiv (b^K c^L)^d (c^N a^M)^e (a^P b^Q)^f, \quad \text{即ち } w \in A_0$$

(II) "$A_0 \subseteq T(\mathbb{A}_0)$" : $w \in A_0$ 即ち $w \equiv (b^K c^L)^{d_0}(c^N a^M)^{e_0}(a^P b^Q)^{f_0}$, $d_0, e_0, f_0 \geqq 0$
に対し ルールδ1.1 ~ 1.4 を用いて

(i) $\mathfrak{S}_0 = (\langle 0,0,0\rangle, w, Z_0) \overset{*}{\underset{\delta}{\vdash}} \mathfrak{S}'(\langle -l,-m,-n\rangle, u, Z_0 x^g)$, $x = a, b$ or c

$$I(\mathfrak{S}') \equiv {}^{①}(c^N a^M)^e (a^P b^Q)^f \text{ or } {}^{②}(b^K c^L)^d (a^P b^Q)^f \text{ or } {}^{③}(b^K c^L)^d (c^N a^M)^e$$

とすることが出来る。更にルール δ 2.1 〜 2.4 を追加することにより、

(ii) ①, ②, ③ のいずれの場合にも

$$\mathfrak{S}' = (\langle -l, -m, -n \rangle, u, z_0 x^g) \vdash_\delta^* (\langle 0, 0, 0 \rangle, \Lambda, z_0) \vdash_\delta (q_F, \Lambda, \Lambda)$$

とすることが出来 (i), (ii) より $w \in T(\mathbb{A}_0)$ をうる。

(i) については, Acceptor $\mathbb{A}_0$ は1時点の Configuration が $\mathfrak{S}_i = (\mathfrak{r}, yv, \gamma)$; $\gamma \in (z_0 a^* \cup z_0 b^* \cup z_0 c^*)$ なる形をしているかぎり、必ず文字 y を読み込んで再び $\mathfrak{S}_i \vdash_\delta^* \mathfrak{S}_{i+1}$,

$\mathfrak{S}_{i+1} = (\mathfrak{r}', v, \gamma')$, $\gamma' \in (z_0 a^* \cup z_0 b^* \cup z_0 c^*)$ とし、$\mathfrak{S}_{i+1}$ の文字情報 $I(\mathfrak{S}_{i+1})$ は $I(\mathfrak{S}_i)$ に対し不変か $(b^K c^L)$, $(c^N a^M)$, or $(a^P b^Q)$ のいずれか1組の情報のみがきっちり減少したものとしうる。この結果すべての Input 文字を読み終り

$$\mathfrak{S}_0 \vdash_\delta^* \mathfrak{S}_1 \vdash_\delta^* \cdots \vdash_\delta^* \mathfrak{S}_s = (\langle -l, -m_s, -n_s \rangle, \Lambda, z_0 x^g),\ g \geqq 0,$$

$$I(\mathfrak{S}_i) \equiv (b^K c^L)^{d_i} (c^N a^M)^{e_i} (a^P b^Q)^{f_i}\ (d_i, e_i, f_i \gtreqless 0 \text{ integers})^{(*)}$$

$(i=1, \cdots, s)$ とすることが出来る。このとき d_s, e_s, f_s の少くとも1つは nonpositive であることが導びかれ、3つの非増大列 $d_0, \cdots, d_s$; $e_0, \cdots, e_s$; $f_0, \cdots, f_s$ のいずれかは必らず0を含む。従って

① $d_j = 0$ の場合は (i) の Case ①
② $e_k = 0$ の場合は (i) の case ②
③ $f_t = 0$ の場合は (i) の Case ③

であり、(i) が示される。

(ii)の①については $\boxed{1\text{-}2}$ $x=b$ or c の場合は $x=a$ の場合に帰着しうること、及び $\boxed{1\text{-}1}$ $x=a$ の場合は容易に

$\mathfrak{S}' \vdash_{\delta}^{*} (\langle 0,0,0\rangle, \Lambda, Z_0) \vdash_{\delta} (q_F, \Lambda, \Lambda)$ が示されることから

$\mathfrak{S}_0 \vdash_{\delta}^{*} \mathfrak{S}' \vdash_{\delta} (q_F, \Lambda, \Lambda)$, 即ち $w \in T(\mathbb{A}_0)$ となる。

(ii)の②, ③ についても (i)の①と同様に示される。

(註)(※) 一般に $I(\mathfrak{S}) = a^i b^j c^k$ $i, j, k \geqq 0$

に対し $a^i b^j c^k \equiv (b^K c^L)^d (c^N a^M)^e (a^P b^Q)^f$

なる $d, e, f \, (\geqq 0)$ integers が存在する場合は一意である。

但し $K, L, N, M, P, Q \gneqq 0$ であり、

$\equiv$ は 3文字 a, b, c から生成される commutative group の要素としての equality と考える。